به نام خدای مهربان

مجموعه کتاب های بیست پک

پرسؤال

هندسه ۱

پایه دهم

حسین درفشی، مصطفی میرعظیم، محمد حسین حشمت‌الواعظین

مطابق با جدیدترین رویکرد امتحانات نهایی

مهروماه

مقدمه

درس هندسه یکی از پرچالش‌ترین درس‌های دورهٔ دوم متوسطه برای عموم دانش‌آموزان است. از طرفی به واسطهٔ تغییرات در ساختار کنکور و افزایش اهمیت نمرات امتحان نهایی، تصمیم گرفتیم مجموعه‌ای برای تمام دانش‌آموزان تهیه کنیم. کتابی که بدون شک شما را از هر منبع دیگری بی‌نیاز کند.

ساختار بیست‌پک

این مجموعه شامل ۱ کتاب پرسؤال، ۲ کاربرگ امتحانی و ۳ خلاصه‌کپسولی است.

۱ کتاب پرسؤال

برای کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی، تسلط بر محتوای کتاب درسی از ملزومات است. در کتاب پرسؤال مجموعهٔ بیست‌پک، ابتدا هر درس را در قالب یک بستهٔ آموزشی به‌طور کامل توضیح داده‌ایم و تمام کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را بررسی کرده‌ایم. پس از هر درسنامه، تعدادی سؤال مشابه تمارین کتاب درسی در نظر گرفته‌ایم تا تسلط شما در حل سؤالات تشریحی مشابه امتحان نهایی بیشتر شود. همچنین تعدادی سؤال با عنوان +۲۰ آورده‌ایم تا اگر سطح سؤالات امتحان نهایی چالشی و دشوار بود، با موفقیت، امتحان را پشت سر بگذارید.

۲ کاربرگ امتحانی

بعد از تسلط بر محتوای کتاب پرسؤال باید خود را در موقعیت امتحان نهایی قرار دهید و از خودتان امتحان بگیرید. برای رفع این نیاز، کاربرگ را برایتان تدارک دیده‌ایم. کاربرگ از ۱۰ امتحان تشکیل شده که شامل ۴ امتحان به تفکیک فصل‌های کتاب درسی، ۲ امتحان برای آمادگی نوبت اول، ۳ امتحان شبیه‌ساز امتحان نهایی و امتحان نهایی سال ۱۴۰۳ است. در طراحی این امتحان‌ها تلاش کرده‌ایم تمام مباحث کتاب درسی را پوشش دهیم تا منبع مناسبی برای شب امتحان باشد.

۳ خلاصه‌کپسولی

برای کاهش استرس شما در روزهای قبل از امتحان، خلاصه‌کپسولی را برایتان نوشته‌ایم که شامل قضایای مهم کتاب درسی است و شانس بیشتری را برای مطرح‌شدن در امتحان نهایی دارد تا با خیال راحت، به جلسهٔ امتحان بروید.

سخن پایانی

این کتاب حاصل تلاش و زحمات چندین‌ماههٔ تیم انتشارات مهروماه است. ادعا می‌کنیم «بیست‌پک» برای کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی کافی است. امیدواریم این مجموعه را با لذت بخوانید و با قدرت در امتحان نهایی به نمرهٔ ۲۰ برسید.

خداوند در قرآن می‌فرمایند: «لیس الانسان الا ما سعی»؛ یعنی انسان به موفقیتی نمی‌رسد، جز در سایهٔ زحمت و تلاش.

در انتها از تمام عزیزان تیم تألیف، ویراستاری، تولید و چاپ انتشارات مهروماه و همچنین استاد «جواد ترکمن» کمال تشکر را دارم.

تقدیم به تمام دانش‌آموزان ایران عزیز

ارادتمند شما: مؤلفین بیست‌پک

فهرست

فصل دوم

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

مشاوره: این فصل یکی از پرکاربردترین فصل‌ها و مباحث هندسه هست که با روابط ریاضی مربوط به نسبت و تناسب شروع میشه تا بتونید تو سؤال‌های مربوط به تالس و تشابه که دو بخش بعدی فصل دوم هست، به‌راحتی از عهدهٔ حل مسائل بربیاید. بخش چهارم فصل هم به کاربرد قضیه‌های دو بخش قبلی اشاره می‌کنه که اگه اونا رو خوب یاد گرفته باشید، بخش راحتی محسوب میشه.

بارم‌بندی این فصل توی امتحان نهایی سال ۱۴۰۳ به شکل زیر بوده:

	مباحثی که می‌خوانید	بارم‌بندی در خرداد ۱۴۰۳
درس اول	نسبت و تناسب در هندسه	۰/۵
درس دوم	قضیهٔ تالس	۲
درس سوم	تشابه مثلث‌ها	۳/۲۵
درس چهارم	کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها	۱/۲۵
مجموع		۷

درس اول
نسبت و تناسب در هندسه

نسبت

هر گاه دو عدد را که واحد یکسان داشته باشند به هم تقسیم کنیم، یک کسر به وجود می‌آید که به آن نسبت می‌گویند؛ برای مثال حاصل تقسیم عدد حقیقی a بر b به‌طوری که $b \neq ۰$ باشد را نسبت a به b می‌نامیم و در ریاضی به شکل $\frac{a}{b}$ نمایش می‌دهیم.

شکل مقابل را در نظر بگیرید:

نقطهٔ M طوری روی پاره‌خط AB قرار گرفته است که $AM = ۴$ و $MB = ۹$ ، در این حالت می‌توانیم بگوییم $\frac{AM}{MB} = \frac{۴}{۹}$. برای این کسر می‌گوییم نقطهٔ M پاره‌خط AB را به نسبت ۴ به ۹ تقسیم کرده است.

تناسب

هر گاه چند نسبت با هم برابر باشند، یک تناسب تشکیل می‌شود؛ برای مثال $\frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ یک تناسب است.

وقتی می‌گوییم زاویه‌های یک مثلث با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب‌اند، یعنی: $\frac{\alpha}{۴} = \frac{\beta}{۵} = \frac{\gamma}{۶}$

در یک تناسب مانند $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ می‌توانیم این‌طور در نظر بگیریم که $a = mk$ و $b = nk$ ؛ زیرا در تقسیم a بر b ، مقدار ثابت k از صورت و مخرج ساده می‌شود.

سؤال در یک مثلث، زاویه‌های A ، B و C به‌ترتیب با اعداد ۳، ۴ و ۵ متناسب‌اند. بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC چه‌قدر از کوچک‌ترین زاویهٔ آن بزرگ‌تر است؟

جواب با توجه به صورت مسئله داریم:

$$\frac{\widehat{A}}{۳} = \frac{\widehat{B}}{۴} = \frac{\widehat{C}}{۵}$$

اگر سه نسبت قبل را برابر k در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\widehat{A} = ۳k , \widehat{B} = ۴k , \widehat{C} = ۵k$$

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است؛ بنابراین:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳k + ۴k + ۵k = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲k = ۱۸۰^\circ \Rightarrow k = ۱۵^\circ$$

$$\widehat{A} = ۳k = ۴۵^\circ , \widehat{B} = ۴k = ۶۰^\circ , \widehat{C} = ۵k = ۷۵^\circ$$

اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه $= \widehat{C} - \widehat{A} = ۷۵^\circ - ۴۵^\circ = ۳۰^\circ$

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ (b , d \neq ۰)$ به a و d طرفین و به c و b وسطین تناسب می‌گوییم.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است:

توضیحات	مثال	ویژگی
طرفین وسطین‌کردن	$\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۰} \Leftrightarrow ۲ \times ۱۰ = ۴ \times ۵$	۱ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
معکوس‌کردن (می‌توانیم هر دو طرف تناسب را معکوس کنیم.)	$\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۶}{۳} = \frac{۲}{۱}$	۲ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
تعویض جای طرفین یا وسطین (می‌توانیم جای طرفین یا وسطین را تعویض کنیم.)	$\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۹} \rightarrow \frac{۹}{۳} = \frac{۶}{۲}$ ، $\frac{۲}{۶} = \frac{۳}{۹}$	۳ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ ، $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

توضیحات	مثال	ویژگی
ترکیب نسبت در صورت یا مخرج (می‌توانیم صورت را با مخرج جمع کنیم و بالعکس.)	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}$ → $\frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}$ ، $\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	۴ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ → $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ، $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$
تفضیل نسبت در صورت یا مخرج (می‌توانیم صورت را از مخرج کم کنیم و بالعکس.)	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴}$ → $\frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$ ، $\frac{۳۰}{-۹}=\frac{۲۰}{-۶}$	۵ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ → $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ، $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$
می‌توانیم صورت‌ها را با هم جمع (تفریق) کنیم و مخرج‌ها را با هم جمع (تفریق) کنیم.	$\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$	۶ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تذکر: ویژگی ۶ قابل تعمیم‌دادن است. فرض کنید یک تناسب مانند $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ داشته باشیم. اگر تمام صورت‌ها را با هم جمع کنیم و تمام مخرج‌ها را با هم جمع کنیم، نسبت حاصل با تمام نسبت‌های قبلی برابر است؛ یعنی:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱+۲+۳+۴}{۲+۴+۶+۸}=\frac{۱۰}{۲۰}$$

سؤال اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)

جواب **روش اول:** مقدار هر یک از مجهول‌ها را به‌طور مجزا محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}\quad\begin{cases}\frac{x}{۲}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow x=\frac{۶}{۵}\\ \frac{y}{۳}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow y=\frac{۹}{۵}\\ \frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow z=\frac{۱۸}{۵}\end{cases}\xrightarrow{+}x+y+z=\frac{۳۳}{۵}$$

روش دوم: طبق قوانین تناسب داریم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{x+y+z}{۲+۳+۶}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{x+y+z}{۱۱}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow x+y+z=\frac{۳۳}{۵}$$

سؤال اگر تناسب $\frac{۲a+۳}{۲+۲b}=\frac{۳a+۶}{۴+۳b}$ برقرار باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ را به دست آورید.

جواب با طرفین وسطین‌کردن تناسب بالا داریم:

$$\frac{۲a+۳}{۲+۲b}=\frac{۳a+۶}{۴+۳b}\Rightarrow(۲a+۳)(۴+۳b)=(۳a+۶)(۲+۲b)$$

$$\Rightarrow ۸a+۶ab+۱۲+۹b=۶a+۶ab+۱۲+۱۲b\Rightarrow ۸a-۶a=۱۲b-۹b\Rightarrow ۲a=۳b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۲}{۳}$$

واسطهٔ هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، یعنی $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ یا $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ ، با طرفین وسطین‌کردن تناسب، نتیجه می‌شود $b^۲=ac$ ، در این صورت b را واسطهٔ هندسی یا میانگین هندسی a و c می‌نامیم؛ به عنوان مثال عدد ۶ واسطهٔ هندسی دو عدد ۴ و ۹ است، زیرا: $\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow ۳۶=۴\times۹$

سؤال عدد b ، واسطهٔ هندسی دو عدد a و ۸ است. اگر ۶ ، واسطهٔ هندسی b و ۹ باشد، مقدار $۲a-۳b$ چه‌قدر است؟

جواب

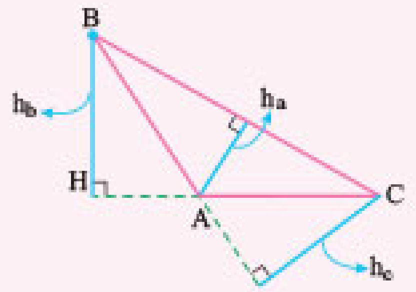
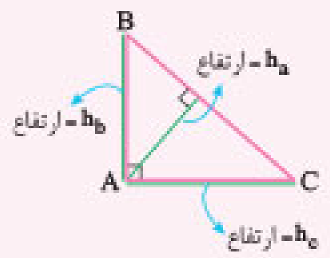
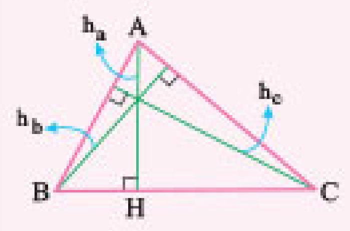
۶ میانگین هندسی b و ۹ $\Rightarrow\frac{b}{۶}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow ۳۶=۹\times b\Rightarrow b=۴$

b میانگین هندسی a و ۸ $\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{۸}\xrightarrow{b=۴}\frac{a}{۴}=\frac{۴}{۸}\Rightarrow a=\frac{۱۶}{۸}=۲$

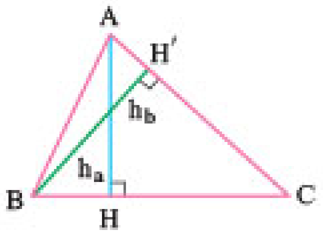
$$۲a-۳b=۲(۲)-۳(۴)=۴-۱۲=-۸$$

رابطهٔ ارتفاع و ضلع مثلث

یادآوری: در هر مثلث، ارتفاع، پاره‌خطی است که از یک رأس بر ضلع مقابل یا امتداد ضلع مقابل عمود می‌شود.

مثلث با زاویهٔ منفرجه	مثلث با زاویهٔ قائمه	مثلث با زاویهٔ حاده
		

در هر مثلث، ارتفاع‌ها با اضلاع مثلث رابطه دارند. در مثلث ABC ، ارتفاع‌های AH و BH' را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث را یک بار با ارتفاع AH و قاعدهٔ BC و یک بار با ارتفاع BH' و قاعدهٔ AC به دست می‌آوریم. مساحت در دو حالت با هم برابر است؛ بنابراین:



$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AH\cdot BC \\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times BH'\cdot AC \end{array}\right\} \Rightarrow AH\cdot BC=BH'\cdot AC \Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{BH'}{AH} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$$

یعنی در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است؛ به بیان دیگر طول ضلع و اندازهٔ ارتفاع وارد بر آن، رابطهٔ عکس با هم دارند. هرچه طول ضلع بزرگ‌تر باشد، اندازهٔ ارتفاع وارد بر آن کوچک‌تر است و بالعکس؛ بنابراین بزرگ‌ترین ارتفاع، ارتفاعی است که بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود و کوچک‌ترین ارتفاع، ارتفاعی است که بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود؛ به عنوان مثال: $a>b>c \Leftrightarrow h_a<h_b<h_c$

سؤال اندازه‌های سه ارتفاع از مثلثی ۶، ۸ و ۱۰ است. نسبت مجموع دو ضلع بزرگ‌تر به ضلع سوم چه‌قدر است؟

جواب در مثلث ABC ، فرض می‌کنیم $h_a=۶$ ، $h_b=۸$ و $h_c=۱۰$ باشد؛ در این صورت داریم:

$$h_c>h_b>h_a \Rightarrow a>b>c \qquad \frac{a+b}{c}=?$$

روش اول:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \xrightarrow[\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}]{\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}} \frac{h_c}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}=\frac{۱۰}{۶}+\frac{۱۰}{۸}=\frac{۴۰+۳۰}{۲۴}=\frac{۷۰}{۲۴}=\frac{۳۵}{۱۲}$$

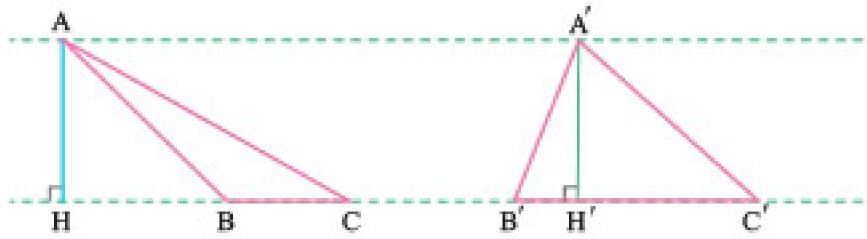
روش دوم: در مثلث ABC داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}a\times h_a \Rightarrow a=\frac{۲S}{h_a} \qquad S=\frac{۱}{۲}b\times h_b \Rightarrow b=\frac{۲S}{h_b} \qquad S=\frac{۱}{۲}c\times h_c \Rightarrow c=\frac{۲S}{h_c}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\frac{۲S}{h_a}+\frac{۲S}{h_b}}{\frac{۲S}{h_c}}=\frac{\cancel{۲S}\left(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}\right)}{\cancel{۲S}\left(\frac{۱}{h_c}\right)}=\frac{\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۱۰}}=\frac{\frac{۷}{۲۴}}{\frac{۱}{۱۰}}=\frac{۷۰}{۲۴}=\frac{۳۵}{۱۲}$$

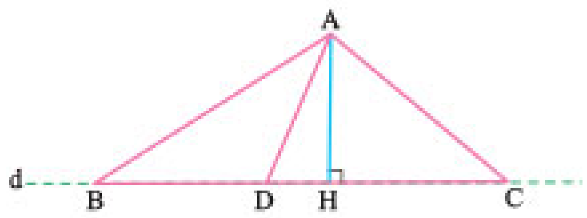
نسبت مساحت دو مثلث

اگر دو مثلث، ارتفاع‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده‌اند. به شکل‌های مقابل دقت کنید:



$$AH=A'H' \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times BC\cdot AH}{\frac{۱}{۲}\times B'C'\cdot A'H'}=\frac{BC}{B'C'}$$

توجه: در سؤالات، عمدتاً دو مثلث را به‌طور مجزا رسم نمی‌کنند. اگر دو مثلث یک رأس مشترک داشته باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، آن‌گاه دو مثلث، ارتفاع یکسان خواهند داشت و می‌توانیم بگوییم نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها است. به شکل مقابل دقت کنید:



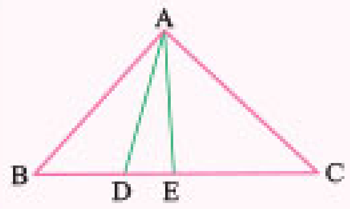
ارتفاع مثلث‌های ABD ، ADC و ABC برابر AH است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times BD\cdot AH}{\frac{۱}{۲}\times CD\cdot AH}=\frac{BD}{CD}$$

همچنین می‌توانیم بگوییم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}=\frac{BC}{BD}\ ,\ \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}}=\frac{BC}{CD}$$

سؤال در شکل مقابل، رابطهٔ $EC=۲BD=۴DE$ برقرار است. نسبت مساحت مثلث AEC به مساحت مثلث ABC را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)



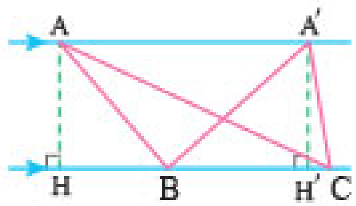
جواب ابتدا اندازهٔ پاره‌خط‌های BD و DE را برحسب اندازهٔ پاره‌خط EC می‌یابیم:

$$EC=۲BD=۴DE \begin{cases} EC=۲BD \Rightarrow BD=\frac{EC}{۲} \\ EC=۴DE \Rightarrow DE=\frac{EC}{۴} \end{cases}$$

دو مثلث AEC و ABC رأس مشترک دارند و قاعده‌هایشان روی یک خط راست است؛ بنابراین نسبت مساحت آن‌ها، برابر نسبت قاعده‌هایشان است.

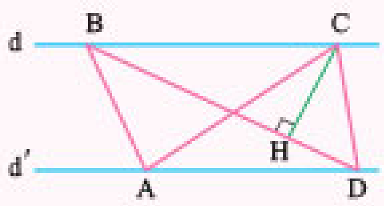
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{EC}{BC}=\frac{EC}{BD+DE+EC}\xrightarrow[DE=\frac{EC}{۴}]{BD=\frac{EC}{۲}}\frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{EC}{\frac{EC}{۲}+\frac{EC}{۴}+EC}=\frac{EC}{\frac{۷EC}{۴}}=\frac{۴}{۷}$$

نتیجه: هرگاه دو مثلث، ارتفاع برابر داشته باشند و قاعدهٔ نظیر این ارتفاع‌ها با هم برابر باشد، آن‌گاه مساحت دو مثلث، برابر و نسبت مساحت آن‌ها ۱ است. به شکل روبه‌رو دقت کنید:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\cdot BC$$
$$S_{\overset{\triangle}{A'BC}}=\frac{۱}{۲}A'H'\cdot BC \xrightarrow[\text{خط موازی یکسان است.}(AH=A'H')]{\text{فاصلهٔ بین دو}} S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{A'BC}}$$

سؤال در شکل مقابل، خط‌های d و d' با هم موازی هستند و مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۱۶ است. اگر طول پاره‌خط BD ، برابر ۸ باشد، طول ارتفاع CH چه‌قدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



جواب در شکل سؤال، دو مثلث ABC و BCD ارتفاع یکسان دارند و قاعدهٔ آن‌ها BC است؛ در نتیجه $S_{\overset{\triangle}{BCD}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}$. چون $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۱۶$، پس:

$$S_{\overset{\triangle}{BCD}}=۱۶\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BCD}}=\frac{۱}{۲}\times BD\cdot CH=۱۶\xrightarrow{BD=۸}CH=\frac{۲\times۱۶}{۸}=۴$$

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۷۸. اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه $\frac{a+۲}{b+۳}=\frac{a}{b}$ است. ☐ ☐

۷۹. در هر مثلث، نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت قاعدهٔ نظیرشان است. ☐ ☐

۸۰. در مثلث ABC اگر $a>b>c$ ، آن‌گاه $h_a>h_b>h_c$. ☐ ☐

۸۱. هر دو مثلث هم‌مساحت، هم‌نهشت هستند. ☐ ☐

۸۲. دو مثلث که در یک رأس مشترک‌اند، هم‌مساحت هستند. ☐ ☐

سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۸۳. به برابری چند نسبت، یک ...... می‌گویند.

۸۴. در یک نسبت مانند $\frac{a}{b}$، b نمی‌تواند ...... باشد.

۸۵. اگر نقطهٔ M پاره‌خط $AB=۸$ را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کند، دو پاره‌خط به طول ...... و ...... تشکیل می‌شود.

۸۶. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، به a و d ...... و به c و b ...... می‌گویند.

۸۷. در یک مثلث، اگر زاویه‌ها با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب باشند، بزرگ‌ترین زاویه ...... است.

۸۸. اگر $\frac{۴}{۵}=\frac{a}{b}$ باشد، آن‌گاه $\frac{a-b}{b}$ برابر ...... است.

۸۹. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$، به b ...... می‌گویند.

۹۰. عدد ۶ واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۱۲ و ...... است.

۹۱. در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ...... برابر است.

۹۲. در هر مثلث، بزرگ‌ترین ارتفاع، ارتفاعی است که به ...... وارد می‌شود.

۹۳. اگر دو مثلث ارتفاع برابر داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر ...... است.

۹۴. اگر دو مثلث قاعدهٔ یکسان داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر ...... است.

۹۵. در هر مثلث، میانه، مثلث را به دو مثلث ...... تقسیم می‌کند.

سؤالات اثباتی

ثابت کنید:

+۲۰ ۹۶. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، نشان دهید تناسب $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ برقرار است.

+۲۰ ۹۷. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، نشان دهید تناسب $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ برقرار است.

+۲۰ ۹۸. اگر $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$ باشد، نشان دهید $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=k$ است.

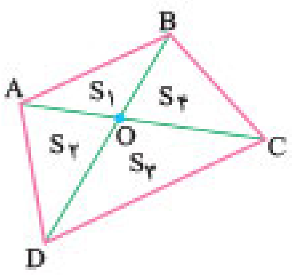
۹۹. در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.

۱۰۰. اگر دو مثلث قاعدهٔ برابر داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت ارتفاع نظیرشان است.

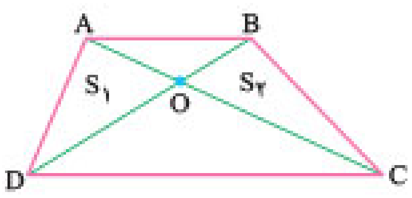
۱۰۱. اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعدهٔ آن‌ها است.

۱۰۲. هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

+۲۰ ۱۰۳. در هر چهارضلعی محدب با رسم دو قطر، چهار مثلث تشکیل می‌شود. نشان دهید رابطهٔ $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ برقرار است.



+۲۰ ۱۰۴. در ذوزنقهٔ $ABCD$، نشان دهید رابطهٔ $S_1=S_2$ برقرار است:



مسائل

۱۰۵. اگر $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}=\frac{۲}{۵}$ باشد، حاصل $a+b-c$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۰۶. اگر $\frac{۵a+b}{۳a-۲b}=\frac{۳}{۲}$ باشد، نسبت b به a را به دست آورید.

+۲۰ ۱۰۷. اگر $\frac{z-۳}{۴}=\frac{y+۵}{۳}=\frac{x-۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{x+y+۴}{z-۳}$ را به دست آورید.

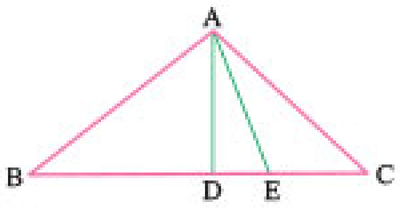
۱۰۸. طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۳ و ۲۷ سانتی‌متر است. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۰۹. اگر پاره‌خطی به طول $b=\sqrt{۱۴}$ واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های $a=\sqrt{۲۱}$ و c باشد، مقدار c را به دست آورید.

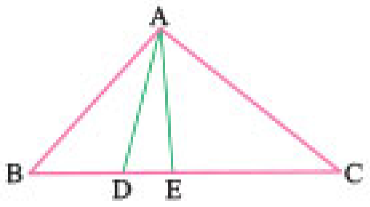
۱۱۰. در مثلث ABC به اضلاع $a=۵$ ، $b=۶$ و $c=۸$ ، حاصل $\frac{h_a-h_c}{h_b}$ را به دست آورید.

۱۱۱. در مثلث ABC اگر $h_a=۳$ ، $h_b=۴$ و $h_c=۵$ باشد و ضلع کوچک‌تر ۶ سانتی‌متر باشد، طول ضلع بزرگ‌تر مثلث را به دست آورید.

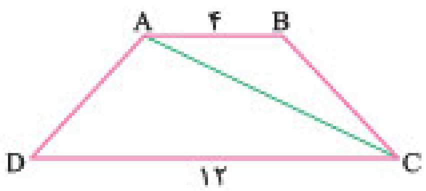
۱۱۲. در شکل مقابل، مساحت $\overset{\triangle}{ACE}$ دو برابر مساحت $\overset{\triangle}{ADE}$ و نصف مساحت $\overset{\triangle}{ABD}$ است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{EC}$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)



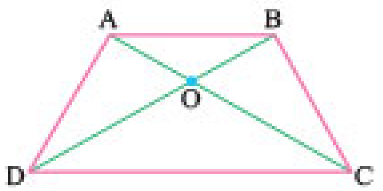
۱۱۳. اگر در شکل مقابل، $EC=۲BD=۳DE$ و مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۲۲ باشد، مساحت $\overset{\triangle}{ADE}$ را به دست آورید.



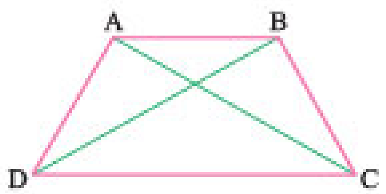
۱۱۴. اگر در شکل مقابل، مساحت ذوزنقهٔ ABCD برابر ۳۲ باشد، مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ را به دست آورید.



+۲۰ ۱۱۵. در ذوزنقهٔ مقابل، $S_{\overset{\triangle}{AOB}}=۴$ و $S_{\overset{\triangle}{DOC}}=۱۶$ است. مساحت $\overset{\triangle}{AOD}$ را به دست آورید.



۱۱۶. در ذوزنقهٔ ABCD ، مساحت $\overset{\triangle}{BCD}$ برابر ۲۱ است. اگر فاصلهٔ D از قطر AC ، برابر ۶ باشد، طول قطر AC را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

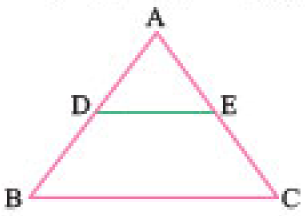


درس دوم

قضیهٔ تالس

قضیهٔ تالس

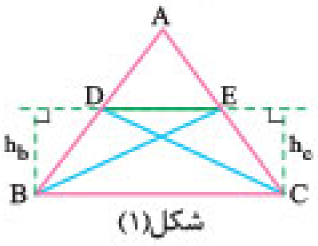
هر گاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع رسم کنیم، به‌طوری که دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط ایجاد می‌شود که اندازه‌های آن‌ها با هم متناسب‌اند؛ به عنوان مثال در مثلث ABC مقابل داریم:



$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

اثبات:

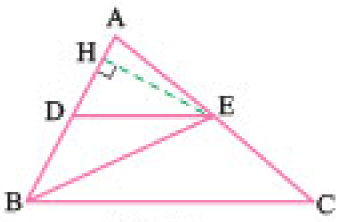
در شکل زیر، ED موازی BC رسم شده است. دو مثلث EDB و EDC ارتفاع برابر و قاعدهٔ یکسان دارند؛ در نتیجه مساحت آن‌ها با هم برابر است.



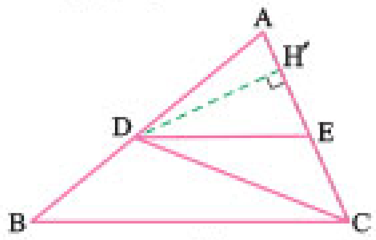
شکل(۱)

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{EDB}} = \frac{۱}{۲} \times h_b \cdot DE \\ S_{\overset{\triangle}{EDC}} = \frac{۱}{۲} \times h_c \cdot DE \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{EDB}} = S_{\overset{\triangle}{EDC}} \quad ✲$$

مثلث‌های EDA و EDB در رأس E مشترک‌اند و ارتفاع برابر دارند، همچنین مثلث‌های EDA و EDC در رأس D مشترک‌اند و ارتفاع برابر دارند؛ بنابراین نسبت مساحت‌ها با توجه به شکل‌ها به‌صورت زیر است:



شکل(۲)



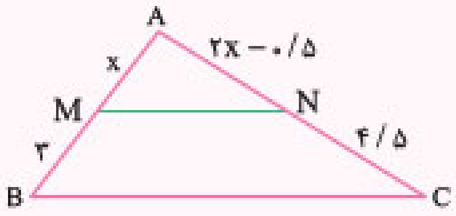
شکل(۳)

با توجه به شکل (۲): $\frac{S_{\overset{\triangle}{EDA}}}{S_{\overset{\triangle}{EDB}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times EH \cdot AD}{\frac{۱}{۲} \times EH \cdot BD} = \frac{AD}{DB}$ ، با توجه به شکل (۳): $\frac{S_{\overset{\triangle}{EDA}}}{S_{\overset{\triangle}{EDC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times DH' \cdot AE}{\frac{۱}{۲} \times DH' \cdot EC} = \frac{AE}{EC}$

با استفاده از رابطهٔ ✲ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{S_{\overset{\triangle}{EDA}}}{S_{\overset{\triangle}{EDB}}} = \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{\overset{\triangle}{EDA}}}{S_{\overset{\triangle}{EDC}}} = \frac{AE}{EC} \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{\overset{\triangle}{EDB}} = S_{\overset{\triangle}{EDC}}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

سؤال در شکل زیر، $MN \parallel BC$. به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را بیابید. (کار در کلاس کتاب درسی)

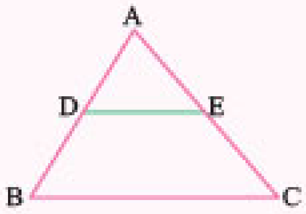


جواب

$$\overset{\triangle}{ABC} : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۲x - ۰/۵}{۴/۵}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴/۵x = ۶x - ۱/۵ \Rightarrow ۱/۵x = ۱/۵ \Rightarrow x = ۱$$

سؤال با کمک ویژگی‌های تناسب، عبارت‌های داده‌شده را ثابت کنید. $(DE \parallel BC)$ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)



الف) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$

جواب

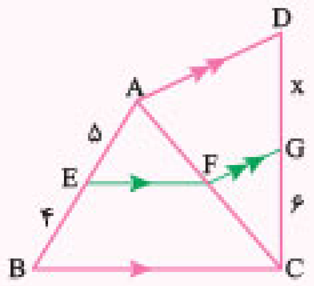
الف) $\overset{\triangle}{ABC}: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

به این تناسب، اصطلاحاً تناسب جزء‌به‌کل می‌گویند که جزء نتایج قضیهٔ تالس است.

ب) $\overset{\triangle}{ABC}: DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس جزء‌به‌کل}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}$

$\Rightarrow \frac{-(AB-AD)}{AB}=\frac{-(AC-AE)}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$

سؤال در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ و $FG \parallel AD$ است. مقدار x چه‌قدر است؟

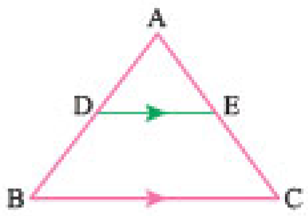


جواب

$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\\ \overset{\triangle}{ACD}: FG \parallel AD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AF}{FC}=\frac{DG}{GC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{DG}{GC} \Rightarrow \frac{۵}{۴}=\frac{x}{۶} \Rightarrow x=\frac{۳۰}{۴}=۷/۵$

تعمیم قضیهٔ تالس

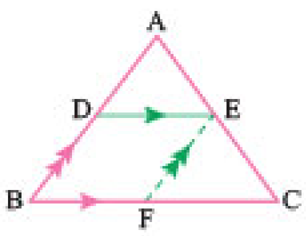
اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

اثبات: برای اثبات، از نقطهٔ E خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا BC را در نقطهٔ F قطع کند. در چهارضلعی $DEFB$ اضلاع روبه‌رو با هم موازی‌اند؛ در نتیجه چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین:

$DE=BF$



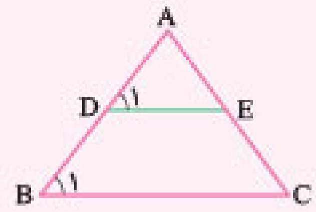
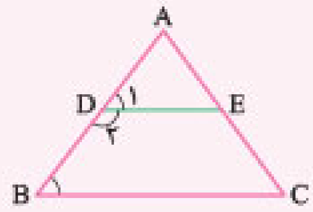
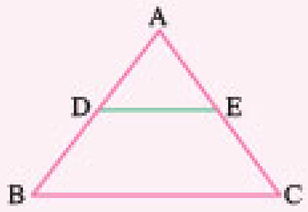
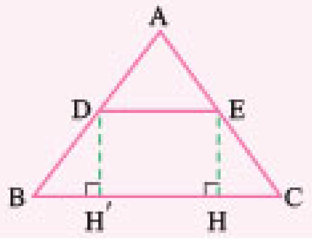
در شکل قبل، دو بار از قضیهٔ تالس (تالس جزء‌به‌کل) استفاده می‌کنیم.

با جای‌گذاری DE به جای BF داریم:

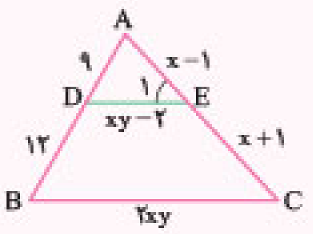
$$\left.\begin{array}{l}DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\\ FE \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$$

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ (تعمیم قضیهٔ تالس)

توجه: گاهی در صورت سؤال به‌صورت مستقیم، موازی‌بودن دو خط بیان نمی‌شود و باید با توجه به اطلاعات مسئله، موازی‌بودن دو خط را نتیجه بگیریم؛ سپس از قضیهٔ تالس استفاده کنیم. رایج‌ترین حالات در جدول زیر بیان شده است:

حالت اول	حالت دوم	حالت سوم	حالت چهارم
گاهی در سؤال بیان می‌شود $\widehat{B}_1=\widehat{D}_1$؛ در این‌صورت طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌توان نتیجه گرفت $BC \parallel DE$. 	گاهی در سؤال بیان می‌شود که $\widehat{B}+\widehat{D}_2=180^\circ$. می‌دانیم $\widehat{D}_1+\widehat{D}_2=180^\circ$؛ بنابراین $\widehat{B}=\widehat{D}_1$ و طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌توان نتیجه گرفت $BC \parallel DE$. 	گاهی در سؤال بیان می‌شود که چهارضلعی DECB یک ذوزنقه است و می‌دانیم در ذوزنقه قاعده‌ها با هم موازی هستند، $BC \parallel DE$. 	گاهی در سؤال بیان می‌شود که فاصلهٔ نقاط E و D از ضلع BC با هم برابر است. اگر $DH'=EH$، می‌توان نتیجه گرفت $BC \parallel DE$. 

سؤال در شکل مقابل، $\widehat{E}_1=\widehat{C}$ است. مقدار $2x-y$ چه‌قدر است؟



جواب

$$\widehat{E}_1=\widehat{C} \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیهٔ خطوط}} DE \parallel BC$$

ابتدا با استفاده از قضیهٔ تالس، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{9}{12}=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow 9x+9=12x-12 \Rightarrow x=7$$

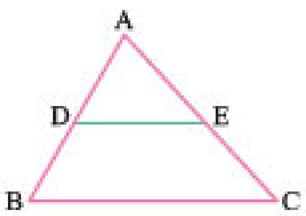
سپس با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس، مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{7}{\cancel{21}}}=\frac{7y-2}{14y} \Rightarrow 42y=49y-14 \Rightarrow 7y=14 \Rightarrow y=2$$

بنابراین:

$$2x-y=2(7)-2=12$$

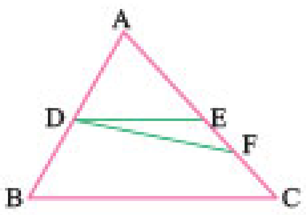
عکس قضیهٔ تالس



قضیهٔ تالس یک قضیهٔ دوشرطی است و عکس آن هم یک قضیهٔ همواره درست است.

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$



اثبات: برای اثبات قضیهٔ قبل، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. در شکل مقابل، می‌دانیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، در نتیجه:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+BD}=\frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \quad ❋$$

فرض می‌کنیم $DE \nparallel BC$. از نقطهٔ D پاره‌خط DF را موازی BC رسم می‌کنیم. طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

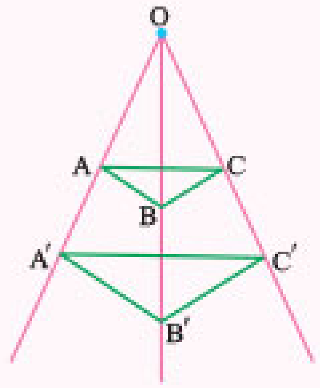
$$DF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

طبق رابطهٔ ❋، $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ است. با مقایسهٔ تناسب‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}\\[2mm]\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow AE=AF$$

بنابراین باید F بر E منطبق باشد، پس DF همان DE است؛ در نتیجه DE موازی BC است.

سؤال در شکل مقابل، می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$. با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید $AC \parallel A'C'$.
(تمرین کتاب درسی)



جواب

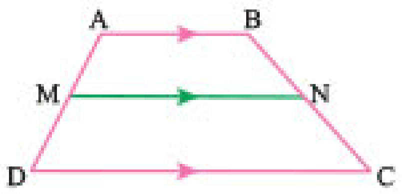
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OA'B'} : AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \dfrac{OA}{AA'} = \dfrac{OB}{BB'} \\ \overset{\triangle}{OB'C'} : BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \dfrac{OB}{BB'} = \dfrac{OC}{CC'} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{OA}{AA'} = \dfrac{OC}{CC'}$$

طبق عکس قضیهٔ تالس، در مثلث $OA'C'$ داریم:

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'} \Rightarrow AC \parallel A'C'$$

تالس در ذوزنقه

در هر ذوزنقه، اگر خطی موازی دو قاعده رسم شود، روی ساق‌های ذوزنقه چهار پاره‌خط به وجود می‌آید و پاره‌خط‌های متناظر، با هم متناسب‌اند.



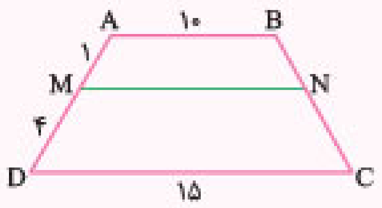
$$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

نکته: در حل سؤالات تالس در ذوزنقه، از دو ایده می‌توان استفاده کرد:

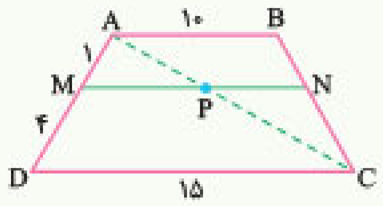
۱ یکی از قطرها رسم شود.

۲ از یکی از رأس‌های قاعدهٔ کوچک‌تر، خطی موازی یکی از ساق‌ها رسم شود.

سؤال در شکل مقابل، $AB \parallel MN \parallel DC$ است؛ طول پاره‌خط MN چه‌قدر است؟



جواب **روش اول:** قطر AC را رسم می‌کنیم:



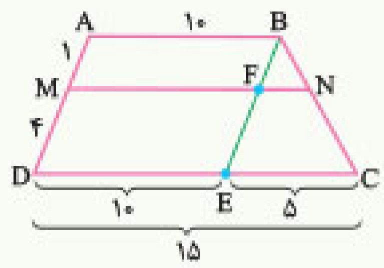
$$MN \parallel AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس در ذوزنقه}} \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{BC}{NC} = \frac{۵}{۴} \quad (*)$$

$$\overset{\triangle}{ADC} : MP \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DC} \Rightarrow \frac{۱}{۵} = \frac{MP}{۱۵} \Rightarrow MP = ۳$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : PN \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{CN}{CB} = \frac{PN}{AB} \xrightarrow{(*)} \frac{۴}{۵} = \frac{PN}{۱۰} \Rightarrow PN = ۸$$

$$MN = MP + PN = ۳ + ۸ = ۱۱$$

روش دوم: از رأس B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ABED$ یک متوازی‌الاضلاع و $DE = MF = AB = ۱۰$ است؛ بنابراین:



$$MN \parallel AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس در ذوزنقه}} \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BN}{BC} = \frac{۱}{۵}$$

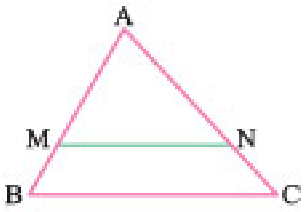
$$\overset{\triangle}{EBC} : FN \parallel EC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{BN}{BC} = \frac{FN}{EC} \xrightarrow{EC=۵} \frac{۱}{۵} = \frac{FN}{۵} \Rightarrow FN = ۱$$

$$MN = MF + FN = ۱۰ + ۱ = ۱۱$$

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.



۱۱۷. در شکل مقابل، پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (تمرین کتاب درسی)

الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

ت) $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$

ث) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}=\frac{MN}{BC}$

ج) $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$

چ) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

ح) $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$

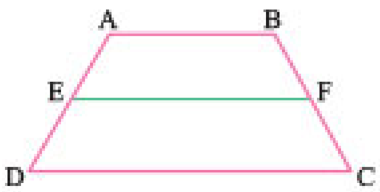
سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱۱۸. هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، پاره‌خط‌های به وجود آمده روی اضلاع مثلث، دوبه‌دو با هم .... هستند.

۱۱۹. هرگاه خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و قطعات به وجود آمده .... باشند، آن‌گاه خط رسم‌شده .... ضلع سوم مثلث است.

۱۲۰. اگر خطی به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم شود، به طوری که .... آن را قطع کند، آن‌گاه پاره‌خط‌های متناظر ایجادشده روی .... با هم متناسب هستند.

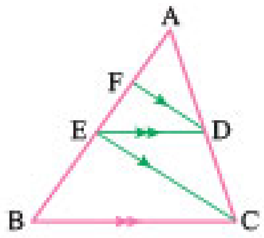


۱۲۱. در ذوزنقهٔ مقابل، اگر EF موازی CD باشد، آن‌گاه $\frac{AE}{\square}=\frac{\square}{BC}$.

سؤالات اثباتی

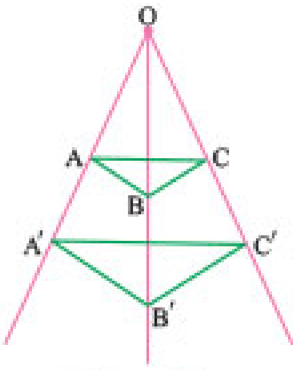
۱۲۲. قضیهٔ تالس را بیان کرده و آن را اثبات کنید.

۱۲۳. تعمیم قضیهٔ تالس را بیان کرده و آن را اثبات کنید.



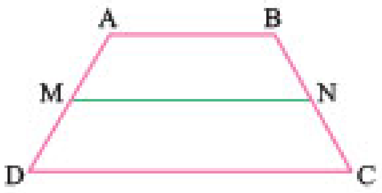
۱۲۴. در شکل مقابل، $FD \parallel EC$ و $ED \parallel BC$ است. ثابت کنید پاره‌خط AE واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط AF و AB است. $(AE^2 = AF \cdot AB)$ (تمرین کتاب درسی)

۱۲۵. به کمک برهان خلف، عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنید.



۱۲۶. در شکل مقابل، می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$. با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید $AC \parallel A'C'$. (تمرین کتاب درسی)

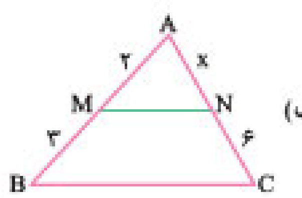
۱۲۷. در ذوزنقهٔ زیر، $MN \parallel AB \parallel DC$. ثابت کنید $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$. (تمرین کتاب درسی)



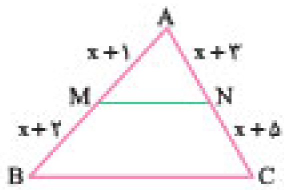
مسائل

۱۲۸. در مثلث‌های زیر، $MN \parallel BC$ رسم شده است. مقادیر مجهول را بیابید. (تمرین کتاب درسی)

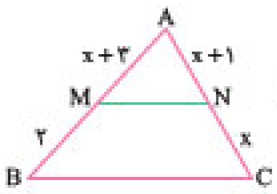
الف)



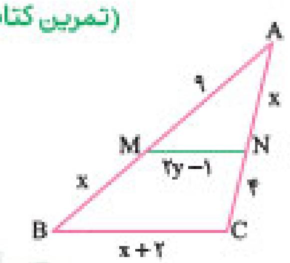
ب)

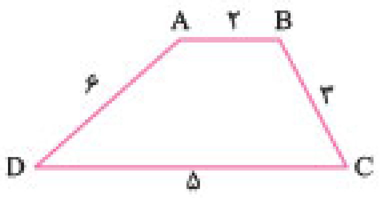


پ)

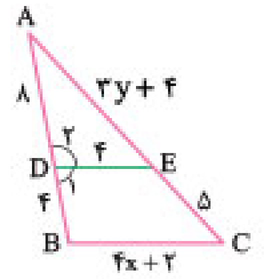


ت)



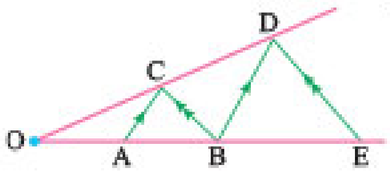


۱۲۹. در ذوزنقهٔ ABCD ، دو ساق AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. محیط مثلث AMB چه‌قدر است؟



۱۳۰. در شکل مقابل، زوایای B و D_1 مکمل یکدیگر هستند. مقدار x و y را بیابید.

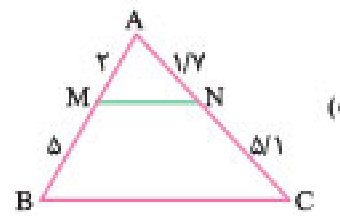
۱۳۱. شخصی در فاصلهٔ ۳ متری از یک درخت ایستاده است، به‌طوری که سایهٔ درخت و سایهٔ شخص بر هم منطبق شده است. اگر قد آن شخص برابر ۱/۵ متر و طول سایهٔ او برابر ۱ متر باشد، ارتفاع درخت چه‌قدر است؟ (تمرین کتاب درسی)



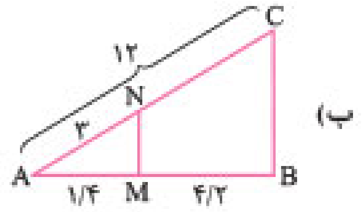
۱۳۲. در شکل مقابل، AC || BD و BC || DE است. اگر OB = ۸ ، OE = ۱۶ و AC = ۳ باشد، طول AB و BD چه‌قدر است؟

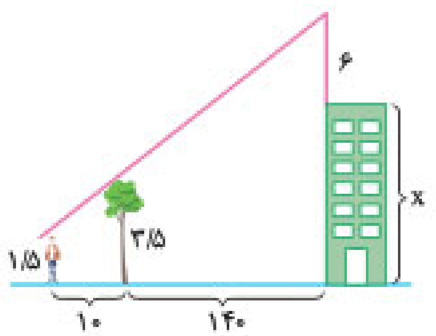
۱۳۳. در کدام‌یک از شکل‌های زیر، MN موازی BC است؟

الف)

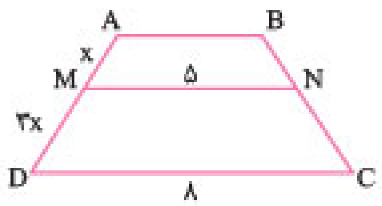


ب)

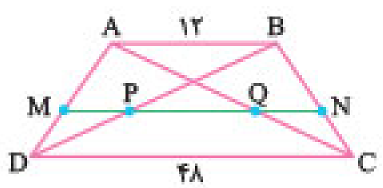




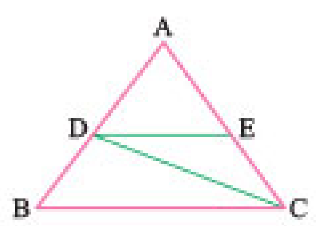
۱۳۴. مطابق شکل مقابل، دکلی به طول ۶ متر بر بالای برجی نصب شده است. در فاصلهٔ ۱۴۰ متری ساختمان، یک درخت به طول ۳/۵ متر قرار دارد و یک ناظر وقتی در فاصلهٔ ۱۰ متری درخت می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای درخت را در یک راستا می‌بیند. اگر فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۵ متر باشد، بلندی ساختمان چه‌قدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱۳۵. +۲۰ در ذوزنقهٔ مقابل، MN موازی قاعده‌ها رسم شده است. طول AB چه‌قدر است؟

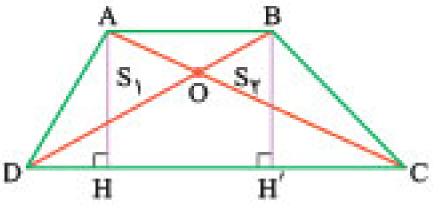


۱۳۶. +۲۰ در ذوزنقهٔ مقابل، MN || AB و $\frac{AM}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است؛ در این‌صورت اندازهٔ PQ چه‌قدر است؟



۱۳۷. +۲۰ در شکل مقابل، چهارضلعی DECB یک ذوزنقه است. اگر $\frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۷}$ و مساحت مثلث ADE ، برابر ۶۰ باشد، مساحت مثلث DEC چه‌قدر است؟

۱۰۴. با توجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\triangle}{ADC}} &= \frac{۱}{۲}\times AH\cdot DC \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} &= \frac{۱}{۲}\times BH'\cdot DC\end{aligned}\right\} \xrightarrow{AH=BH'} S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BCD}}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_{\overset{\triangle}{ADC}} &= S_{\overset{\triangle}{ADO}} + S_{\overset{\triangle}{DOC}} \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} &= S_{\overset{\triangle}{BOC}} + S_{\overset{\triangle}{DOC}}\end{aligned}\right. \xrightarrow{S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BCD}}} S_{\overset{\triangle}{ADO}} = S_{\overset{\triangle}{BOC}} \Rightarrow S_۱ = S_۲$$

۱۰۵.

$$\frac{a}{۳} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow a = \frac{۶}{۵} \ , \ \frac{b}{۵} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow b = \frac{۱۰}{۵} \ , \ \frac{c}{۷} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow c = \frac{۱۴}{۵}$$

$$\Rightarrow a + b - c = \frac{۶}{۵} + \frac{۱۰}{۵} - \frac{۱۴}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

۱۰۶.

$$\frac{۵a + b}{۳a - ۲b} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۰a + ۲b = ۹a - ۶b \Rightarrow a = -۸b$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{۱}{۸}$$

۱۰۷. با توجه به قوانین تناسب داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

$$\underbrace{\frac{x - ۱}{۲} = \frac{y + ۵}{۳}}_{\text{جمع صورت‌ها و مخرج‌ها}} = \frac{z - ۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{x + y + ۴}{۵} = \frac{z - ۳}{۴} \xrightarrow{\text{جابه‌جایی وسطین}} \frac{x + y + ۴}{z - ۳} = \frac{۵}{۴}$$

۱۰۸. اگر طول پاره‌خط x باشد، داریم:

$$\frac{۳}{x} = \frac{x}{۲۷} \Rightarrow x^۲ = ۳ \times ۲۷ = ۸۱ \Rightarrow x = ۹cm$$

۱۰۹. طبق تعریف واسطهٔ هندسی داریم:

$$b^۲ = a \times c \Rightarrow (\sqrt{۱۴})^۲ = \sqrt{۲۱} \times c$$

$$\Rightarrow ۱۴ = \sqrt{۲۱} \times c \Rightarrow c = \frac{۱۴}{\sqrt{۲۱}} \times \frac{\sqrt{۲۱}}{\sqrt{۲۱}} \Rightarrow c = \frac{۱۴\sqrt{۲۱}}{۲۱} = \frac{۲\sqrt{۲۱}}{۳}$$

۱۱۰. نسبت داده‌شده را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{h_a - h_c}{h_b} = \frac{h_a}{h_b} - \frac{h_c}{h_b}$$

می‌دانیم در هر مثلث، نسبت ارتفاع‌ها عکس نسبت قاعدهٔ آن‌ها است.

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_a}{h_b} &= \frac{b}{a} \\ \frac{h_c}{h_b} &= \frac{b}{c}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(-)} \frac{b}{a} - \frac{b}{c} = \frac{۶}{۵} - \frac{۶}{۸} = \frac{۴۸ - ۳۰}{۴۰} = \frac{۱۸}{۴۰} = \frac{۹}{۲۰}$$

۱۱۱. در هر مثلث، طول ضلع و ارتفاع وارد بر آن با هم رابطهٔ عکس دارند؛ بنابراین:

$$h_c > h_b > h_a \Rightarrow a > b > c$$

$$c = ۶$$

$$\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{a}{۶} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow a = ۱۰$$

۱۱۲. می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع یکسان، برابر نسبت قاعدهٔ نظیر آن‌ها است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ACE}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = ۲ \Rightarrow \frac{EC}{DE} = ۲ \quad ①$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ACE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{EC}{BD} = \frac{۱}{۲} \quad ②$$

از تقسیم رابطهٔ ② بر ① داریم:

$$\frac{\frac{EC}{BD}}{\frac{EC}{DE}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{۱}{۴}$$

از رابطه‌های ① و ② داریم:

$$\left.\begin{aligned} BD &= ۲EC \\ DE &= \frac{EC}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow BC = BD + DE + EC$$

$$BC = ۲EC + \frac{EC}{۲} + EC$$

$$BC = \frac{۷}{۲}EC \Rightarrow \frac{BC}{EC} = \frac{۷}{۲}$$

۱۱۳. با توجه به رابطهٔ $EC = ۲BD = ۳DE$ داریم:

$$DE = \frac{EC}{۳} \ , \ BD = \frac{EC}{۲}$$

$$BC = BD + DE + EC = \frac{EC}{۳} + \frac{EC}{۲} + EC$$

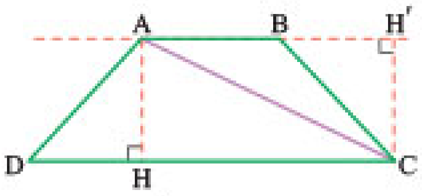
$$BC = \frac{۱۱}{۶}EC$$

مثلث‌های ABC و ADE ارتفاع‌های برابر دارند؛ بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = \frac{BC}{DE} = \frac{\frac{۱۱}{۶}EC}{\frac{۱}{۳}EC} = \frac{۱۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۲۲} \frac{۲۲}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = \frac{۱۱}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}} = ۴$$

۱۱۴. در ذوزنقه، قاعده‌ها موازی هستند $(AB \parallel CD)$؛ بنابراین:



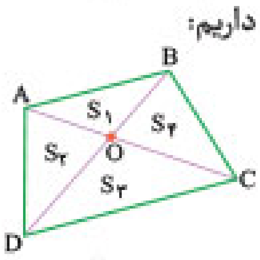
$$AH = CH'$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AB \cdot CH'}{\frac{۱}{۲} \times CD \cdot AH} \xrightarrow{AH = CH'} \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}} = \frac{AB}{CD} = \frac{۴}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\underbrace{S_{\overset{\triangle}{ADC}} + S_{\overset{\triangle}{ABC}}}_{S_{ABCD}}} = \frac{۴}{۱۶} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{ABCD}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{۳۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۸$$

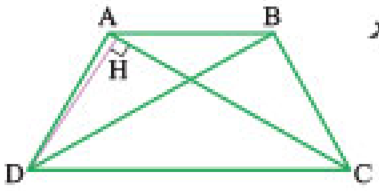
۱۱۵. طبق قضیهٔ اثبات‌شده (پاسخ سؤال‌های ۱۰۳ و ۱۰۴) داریم:



$$S_۲ = S_۴$$

$$S_۱ \cdot S_۳ = S_۲ \cdot S_۴$$

$$۴ \times ۱۶ = S_۲ \cdot S_۲ \Rightarrow S_۲^۲ = ۶۴ \Rightarrow S_۲ = ۸$$



۱۱۶. مثلث‌های BCD و ACD، ارتفاع برابر و قاعدهٔ یکسان دارند؛ بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{ACD}} = S_{\overset{\triangle}{BCD}} = ۲۱$$

$$S_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{۱}{۲}\times DH \times AC \xrightarrow{DH=۶} ۲۱ = \frac{۱}{۲}\times ۶ \times AC \Rightarrow AC = ۷$$

۱۱۷. الف: نادرست / ب: درست / پ: درست / ت: نادرست / ث: نادرست / ج: درست / چ: درست / ح: نادرست

۱۱۸. متناسب

۱۱۹. با هم متناسب، موازی

۱۲۰. دو ساق، دو ساق

۱۲۱. $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$

۱۲۲. به درسنامه (صفحهٔ ۲۶) مراجعه کنید.

۱۲۳. به درسنامه (صفحهٔ ۲۷) مراجعه کنید.

۱۲۴.

$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangle}{AEC}: FD \parallel EC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AC} \\ \overset{\triangle}{ABC}: ED \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AE}{AB}$$

$$\Rightarrow AE^{۲} = AF \cdot AB$$

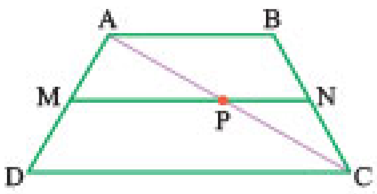
۱۲۵. به درسنامه (صفحهٔ ۲۸) مراجعه کنید.

۱۲۶. به مثال درسنامه (صفحهٔ ۲۹) مراجعه کنید.

۱۲۷.

فرض	$MN \parallel AB \parallel CD$
حکم	$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

برای اثبات، قطر AC را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\triangle}{ADC}: MP \parallel CD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} \quad ①$$

$$\overset{\triangle}{CBA}: NP \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AP}{PC} = \frac{BN}{NC} \quad ②$$

$$\xrightarrow{①,②} \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۱۲۸.

الف) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۴$

ب) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x+۱}{x+۲} = \frac{x+۳}{x+۵}$

$$\Rightarrow (x+۱)(x+۵) = (x+۳)(x+۲)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۶x + ۵ = x^{۲} + ۵x + ۶ \Rightarrow x = ۱$$

پ) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x+۳}{۲} = \frac{x+۱}{x}$

$$\Rightarrow x(x+۳) = ۲(x+۱) \Rightarrow x^{۲} + ۳x = ۲x + ۲ \Rightarrow x^{۲} + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \ ✗ \\ x = ۱ \ ✓ \end{cases}$$

ت) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

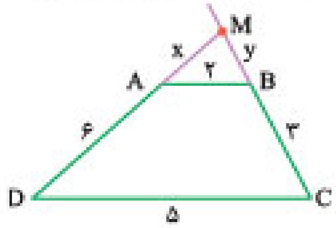
$$\Rightarrow \frac{۹}{x} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۵} = \frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲y-۱}{۸}$$

$$\Rightarrow ۲y - ۱ = \frac{۲۴}{۵} \Rightarrow ۲y - ۱ = ۴/۸ \Rightarrow ۲y = ۵/۸ \Rightarrow y = ۲/۹$$

۱۲۹. دو ساق را امتداد می‌دهیم و $MA = x$ و $MB = y$ در نظر می‌گیریم:



بنابراین:

$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+۶} = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵x = ۲x + ۱۲ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{y}{y+۳} = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵y = ۲y + ۶ \Rightarrow ۳y = ۶ \Rightarrow y = ۲$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } AMB = ۴ + ۲ + ۲ = ۸$$

۱۳۰.

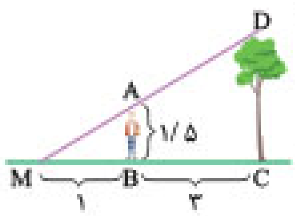
$$\left.\begin{aligned} \hat{B} + \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_۲$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{B} = \hat{D}_۲ \\ \text{خط مورب } DB \end{aligned}\right\} \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۸}{۴} = \frac{۳y+۴}{۵} \Rightarrow y = ۲$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{۴}{۴x+۲} \Rightarrow x = ۱$$

۱۳۱. با توجه به صورت سؤال، تصویر را رسم می‌کنیم:



$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{۱/۵}{DC} \Rightarrow DC = ۶m$$

۱۳۲.

$$\overset{\triangle}{ODE}: BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD}$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OBD}: AC \parallel BD \xrightarrow[\text{جزء به کل}]{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow OA = ۴$$

$$OB = OA + AB \Rightarrow ۸ = ۴ + AB \Rightarrow AB = ۴$$

$$\overset{\triangle}{OBD}: AC \parallel BD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۸} = \frac{۳}{BD} \Rightarrow BD = ۶$$

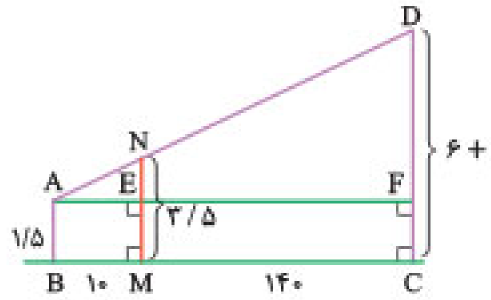
۱۳۳.

الف) $\frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \nparallel BC$

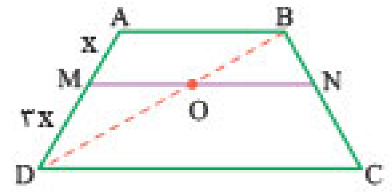
ب) $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} MN \parallel BC$

۱۳۴. نقاط تصویر را نام‌گذاری می‌کنیم و از A، خطی موازی BC رسم می‌کنیم. نقاط برخورد آن با MN و CD را به‌ترتیب E و F می‌نامیم؛ در این صورت $AE=۱۰$، $DF=۶+x-۱/۵=۴/۵+x$، $NE=۳/۵-۱/۵=۲$ و $FC=EM=۱/۵$. از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ADF داریم:

$$\frac{AE}{AF}=\frac{NE}{DF}\Rightarrow \frac{\overset{۱}{\cancel{۱۰}}}{\underset{۱۵}{\cancel{۱۵۰}}}=\frac{۲}{۴/۵+x}\Rightarrow ۴/۵+x=۳۰\Rightarrow x=۲۵/۵$$



۱۳۵. ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع آن با MN را O می‌نامیم:



طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$MN\parallel AB\parallel DC\Rightarrow\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}\Rightarrow\frac{BN}{NC}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۴}$$

در مثلث DBC، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\triangle}{DBC}: ON\parallel DC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{BN}{BC}=\frac{ON}{DC}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{ON}{۸}\Rightarrow ON=۲$$

از طرفی می‌دانیم $MN=۵$ است؛ بنابراین:

$$MN=MO+ON\Rightarrow ۵=MO+۲\Rightarrow MO=۳$$

در مثلث ADB، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\triangle}{ADB}: MO\parallel AB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{DM}{DA}=\frac{MO}{AB}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{AB}\Rightarrow AB=۴$$

۱۳۶.

$$\frac{AM}{MD}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases}AM=۲x\\ MD=۳x\end{cases}$$

$$MN\parallel AB\parallel DC\Rightarrow\frac{BN}{NC}=\frac{AM}{MD}=\frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ADB}: MP\parallel AB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{DM}{DA}=\frac{MP}{AB}$$

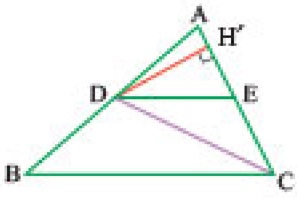
$$\Rightarrow\frac{۳\cancel{x}}{۵\cancel{x}}=\frac{MP}{۱۲}\Rightarrow MP=\frac{۳۶}{۵}$$

$$\overset{\triangle}{ADC}: MQ\parallel DC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{AM}{AD}=\frac{MQ}{DC}$$

$$\Rightarrow\frac{۲\cancel{x}}{۵\cancel{x}}=\frac{MQ}{۴۸}\Rightarrow MQ=\frac{۹۶}{۵}$$

$$PQ=MQ-MP=\frac{۹۶}{۵}-\frac{۳۶}{۵}=\frac{۶۰}{۵}=۱۲$$

۱۳۷.



$$DE\parallel BC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۷}$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۴}$$

دو مثلث ADE و DEC ارتفاع یکسان دارند. می‌دانیم در دو مثلث با ارتفاع یکسان، نسبت مساحت‌ها، برابر نسبت قاعدهٔ نظیر آن‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{DEC}}}=\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۶۰}{S_{\overset{\triangle}{DEC}}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{DEC}}=۸۰$$

۱۳۸. **درست**

۱۳۹. **نادرست** اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۱۴۰. **درست**

۱۴۱. **درست**

۱۴۲. **نادرست** اضلاعشان نظیربه‌نظیر متناسب باشند و زاویه‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

۱۴۳. متشابه

۱۴۴. نسبت تشابه

۱۴۵. $\overset{\triangle}{ADE}$ ، $\overset{\triangle}{ABC}$

۱۴۶. متناسب، متشابه

۱۴۷. واسطهٔ هندسی (میانگین هندسی)

۱۴۸. ۱۴

۱۴۹. به درسنامه (صفحهٔ ۳۲) مراجعه کنید.

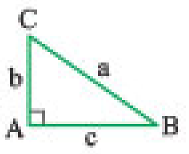
۱۵۰. به درسنامه (صفحهٔ ۳۳) مراجعه کنید.

۱۵۱. به درسنامه (صفحهٔ ۳۳) مراجعه کنید.

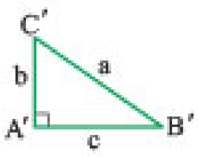
۱۵۲. به درسنامه (صفحهٔ ۳۴) مراجعه کنید.

۱۵۳. به درسنامه (صفحهٔ ۳۵) مراجعه کنید.

۱۵۴. عکس قضیهٔ فیثاغورس: اگر در مثلثی، مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.



فرض	$a^۲=b^۲+c^۲$
حکم	$\widehat{A}=۹۰^\circ$



مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'B'C'$ با $\widehat{A'}=۹۰^\circ$ را رسم می‌کنیم، به‌طوری که $A'C'=b$ و $A'B'=c$ باشد.

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}A'C'^۲+A'B'^۲=b^۲+c^۲\\ (\text{فرض مسئله})\ a^۲=b^۲+c^۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow B'C'^۲=a^۲\Rightarrow B'C'=a$$

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ اضلاع برابر دارند؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}AB=A'B'\\ AC=A'C'\\ BC=B'C'\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})}\overset{\triangle}{ABC}\cong\overset{\triangle}{A'B'C'}\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{A'}=۹۰^\circ$$

۱۵۵. **الف**

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D}=\widehat{E}=۹۰^\circ\\ \widehat{B}=\widehat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{زز})}\overset{\triangle}{ADB}\sim\overset{\triangle}{CEB}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{CE}=\frac{AB}{CB}=\frac{DB}{EB}\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۵}=\frac{۲۱}{x}\Rightarrow x=\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۵}}\times\overset{۷}{\cancel{۲۱}}}{\underset{۲}{\cancel{۱۸}}}\Rightarrow x=۱۷/۵$$